在拓樸向量空間中的MICHAEL選擇定理

林炎成

通識教育中心 講師

摘　要

在本文中，我們討論Michael選擇定理(Michael's selection theorem)在拓樸向量空間中的一個推廣。在本篇中對一個具有某些有用條件而從緊緻拓樸空間映射到一個拓樸向量空間的集合值映射做選擇性質的探討。本篇中也對局部選擇性質加以討論。

*本文作者現正在高雄國立中山大學應用數學研究所博士班進修。對本篇文章的完成，作者要以誠摯的心，感謝姚任之博士的細心指導及提供的有用的註解。

一、前　言

設X，Y爲兩個拓樸空間，我們稱一個集合值映射 $F:X\to 2^Y$ 在 $x_0\in X$ 處爲<u>下半連續</u>(lower semi-continuous)的意思是：若對任何 $x\in F(y_0)$ 及任何x的鄰域N(x)而言，存在一個 y_0 的鄰域 $N(y_0)$ 使得，對所有的 $y\in N(y_0)$，滿足 $N(x)\cap F(y)\neq\phi$。若F在空間X之中的任意點都是下半連續，則我們稱F在X上下半連續。若有一個連續函數 $f:X\to Y$ 滿足 $f(x)\in F(x)\quad\forall x\in X$，我們稱f爲F的一個<u>選擇</u>(selection)。在1956年， Michael[3]證明了一個在測度空間中的下半連續集合值映射具有一個連續選擇函數(continuous selection function)。在本篇文章中，我們將在拓樸向量空間(topological vector space)討論此問題。

二、主要結果

首先，我們需要下列性質(仿自 Aubin[1]的證明)，來介紹我們的主要結果：

命題 1[1]：設 X 為一拓樸空間，Y 為一拓樸向量空間。若 $G:X\to 2^Y\setminus\{\phi\}$ 為下半連續集合值映射且 $g:X\to Y$ 為連續函數。假設任意給定 0 的一個開鄰域 U 而言，對所有的 $x\in X$，均滿足 $\Phi(x)=(U+g(x))\cap G(x)\neq\phi$，則 $\Phi(x)$ 在 $Dom(\Phi)$ 上為下半連續集合值映射。

證明：固定 $x_0\in Dom(\Phi)$ 及 $y_0\in\Phi(x_0)$。任意給定 0 的一個開鄰域 V,則有

$$y_0\in(V+y_0)\cap\Phi(x_0)\neq\phi。$$

我們想找一個 x_0 的開鄰域 $O(x_0)$，使得，對所有的 $x\in O(x_0)$，均有 $(V+y_0)\cap\Phi(x)\neq\phi$。

由於 $y_0\in\Phi(x_0)$，可得 $y_0\in U+g(x_0)$ 以及 $y_0\in G(x_0)$。我們可很容易地找到三個 0 的鄰域 V_1，V_2，V_3，使得

$$y_0-g(x_0)+V_1\subseteq U \tag{1}$$

以及

$$(y_0-g(x_0)+V_1)+V_2-V_3\subseteq U。 \tag{2}$$

令 $N=V\cap V_2$。由 G 的下半連續性知，存在一個 x_0 的開鄰域 $O_1(x_0)$，使得對所有的 $x\in O_1(x_0)$，均有 $(N+y_0)\cap G(x)\neq\phi$。則對所有 $x\in O_1(x_0)$，存在 $y_x\in(N+y_0)\cap G(x)$。如此一來，對所有 $x\in O_1(x_0)$，均有底下性質：

$$y_x\in N+y_0=(V\cap V_2)+y_0 \tag{3}$$

以及

$$y_x\in G(x)。 \tag{3'}$$

由於 $g:X\to Y$ 為連續函數，對鄰域 V_3，存在一個 x_0 的開鄰域 $O_2(x_0)$，使得，對所有的 $x\in O_2(x_0)$，均滿足 $g(x)\in g(x_0)+V_3$。也就是說，對所有的 $x\in O_2(x_0)$，$g(x_0)\in g(x)-V_3$ 均成立。

選取 $O(x_0)=O_1(x_0)\cap O_2(x_0)$。則對任意的 $x\in O(x_0)$，存在 $y_x\in G(x)$，滿足 $y_x\in(V\cap V_2)+y_0$ 以及 $g(x_0)\in g(x)-V_3$。因此 $y_x\in G(x)$，且

$y_x \in (V \cap V_2)+y_0$

$\subseteq (V \cap V_2)+g(x_0)+(y_0-g(x_0)+V_1)$

$\subseteq (V \cap V_2)+(g(x_0)-V_3)+(y_0-g(x_0)+V_1)$

$= g(x)+(V \cap V_2)-V_3+(y_0-g(x_0)+V_1)$

$\subseteq g(x)+U$。

因此，對所有的 $x \in O(x_0)$，存在 $y_x \in G(x) \cap (g(x)+U) \cap (V+y_0)=\Phi(x) \cap (V+y_0) \neq \phi$。

所以，$\Phi(x)$在 $Dom(\Phi)$上為下半連續集合值映射。

定理 2：設 X 為一個亞緊緻拓樸空間(paracompact topological space)，Y 為一個具有 0 的開鄰域濾套(open neighborhoods filter) V(0)的拓樸向量空間。

$F: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$為具有凸值的下半連續集合值映射，則

(甲)對任意 $U \in V(0)$，存在一個連續函數 f_U：$X \to Y$ 使得

$$\forall x \in X,\ f_U(x) \in F(x)+coU。$$

(4)

(乙)假設 V(0)為一個 0 的開凸鄰域濾套。對任意 $W \in V(0)$，固定 $U \in V(0)$滿足$-U \subseteq W$，則存在一個 $V \in V(0)$滿足$-U+V \subseteq W$ 及一個連續函數 f_V：$X \to Y$ 使得，對所有的 $x \in X$，均滿足

(性質 1)　$f_V(x) \in f_U(x)+W$，

及

(性質 2)　$f_V(x) \in F(x)+V$。

(丙)若再加上 Y 具有完備性，則存在一個連續函數 $f: X \to Y$，使得，對所有的 $x \in X$，$f(x) \in cl(F(x))$.　亦即 $clF(x)$具有一個連續選擇函數 $f(x)$。

證明：

(甲)　任取 $x \in X$ 以及 $y_x \in F(x)$。因為 $F: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$為下半連續集合值映射，對任意 $U \in V(0)$，存在一個 x 的開鄰域 N(x)，使得對所有的 $z \in N(x)$，滿足

$$(y_x-U) \cap F(z) \neq \phi。$$

(5)

既然 X 為亞緊緻(paracompact)，其可被 n 個鄰域 $N(x_i)$覆蓋，其中

$i=1,..,n$。我們可伴隨此覆蓋而得一個連續的單位元劃分$\{a_i(.)|i=1,2,..,n\}$，並且定義 $f_U: X \to Y$ 如下：

$$f_U(x)=\sum_{i\in I(x)} a_i(x)y_i \text{，} x\in X$$

其中 $y_i\in F(x_i)$，$i\in\{1,2,..,n\}$且 $I(x)=\{i=1,2,..,n|a_i(x)>0\}\neq\phi$。

對於 $i\in I(x)$，$a_i(x)>0$，且 $x\in N(x_i)$。因此，由(5)式可得$(y_i-U)\cap F(x)\neq\phi$，亦即，$y_i\in F(x)+U$。將這些 y_i 乘上 $a_i(x)$並且加總起來，可得

$$\begin{aligned} f_U(x)&=\sum_{i\in I(x)} a_i(x)y_i \\ &\in \sum_{i\in I(x)} a_i(x)(F(x)+U) \\ &\subseteq co(F(x)+U) \\ &=F(x)+co(U). \end{aligned}$$

因此，對所有的 $x\in X$，$f_U(x)\in F(x)+co(U)$.

(乙) 任意給定 $W\in V(0)$及 $U\in V(0)$具有$-U\subseteq W$，我們可選取 $V\in V(0)$使得 $V\subseteq -U+V\subseteq W$。對所有的 $x\in X$，定義 $G_V(x)=(f_V(x)-U)\cap F(x)$。由(甲)知，對所有的 $x\in X$，$G_V(x)\neq\phi$。利用命題 1，我們知$G_V: X\to 2^Y\backslash\{\phi\}$爲具有凸值的下半連續集合值映射。因此，再次由(甲)知， 存在一個連續函數 $f_V: X\to Y$ 使得，對所有的 $x\in X$，$f_V(x)\in G_V(x)+V$。亦即，對所有的 $x\in X$，$(f_V(x)-V)\cap G_V(x)\neq\phi$，換言之，對所有的 $x\in X$，$(f_V(x)-V)\cap(f_U(x)-U)\cap F(x)\neq\phi$。故對所有的 $x\in X$ 而言，我們可得

$$f_V(x)\in f_U(x)-U+V\subseteq f_U(x)+W \text{，}$$

且

$$f_V(x)\in F(x)+V \text{。}$$

(丙) 我們可定義一個有向集 T，此集合爲所有滿足 $U\in V(0)$以及，對所有的 $x\in X$，使 $f_U(x)\in F(x)+U$ 均成立的有序偶$\langle U,f_U\rangle$所成的集合。定義 $\langle U,f_U\rangle\geq\langle V,f_V\rangle$若且唯若 $U\subseteq V$。我們可建構一序列 V(0)的集合如下：
任意給定 a，$b\in T$ 滿足 $a\leq b$，存在一個 $c\in T$，使得

$$V_a\supseteq V_b\supseteq V_c \text{而且} V_a\supseteq -V_b+V_c \quad (6)$$

設 S＝{a∈T|a 滿足性質(6)}，並且設 β＝{v_α ∈V(0)| α ∈ S }。注意：β形成 0 的鄰域濾套的一個基底(參考：Narici&Bekenstein[2]p.72)，以<U,f_U>爲指標的鄰域 $V_{<U,f_U>}$ 爲 U，而以<U,f_U>爲指標的函數 $f_{<U,f_U>}$ 爲 f_U。由(乙)的性質(1)知，集合{f_V|V∈β}形成一個 C(X,Y)的柯西網(Cauchy net)。既然 Y 是完備的，所以 C(X,Y)也是。因此，存在一個連續函數 f∈C(X,Y)，使得 f_V 均勻連續地收斂到 f，其中 f_V(x)∈F(x)+V。對任意的 U∈β，存在一個指標<W, f_W>，使得，對所有的<V,f_V>≥<W,f_W>，都有 f(x)-f_V(x)∈U 的性質。換言之，對所有β中滿足 V⊆W 的 V，都有 f(x)∈f_V(x)+U∈F(x)+V+U 的性質。故我們可得

$$f(x) \in \cap \{F(x)+V+U \mid V,U \in \beta, V \subseteq W\}$$
$$= cl(F(x))。$$

註 1：當 X 爲緊緻集(compact set)時，定理 2 亦成立。

註 2：我們稱定理 2(甲)中的 f_U(x)爲 F 的 U-選擇(U-selection)。

註 3：若 $F: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$ 爲具有閉凸值(closed convex valued)的下半連續集合值映射，則定理 2(丙)的結

果可改寫爲：

$$\forall x \in X，\ f(x) \in F(x).$$

亦即，F(x)具有一個連續選擇函數 f(x)。這就是 Michael's 定理(The selections I [3]).

定義 1 [Aubin & Cellina [1]p.80]

若對所有 y_0 ∈F(x_0)，存在一個 x_0 的開鄰域 N(x_0)及一個連續函數 f：N(x_0)→Y 使得 f(x_0)=y_0，我們稱 $F: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$ 爲在點 x_0 ∈X 局部可選擇(locally selectionable at x_0 ∈X)以及，對所有的 x∈N(x_0)，f(x)∈F(x)。

若 F 在 X 中的每一點均是局部可選擇的，我們稱 F 爲在 X 上局部可選擇(locally selectionable on X)。

註 4：Aubin & Cellina([1]P.81)指出下列局部可選擇的性質：

(1) 每個局部可選擇的集合值映射均爲下半連續集合值映射。

(2) 若 X 爲一個亞緊緻拓樸空間，且 F 爲從 X 映射到拓樸向量空間 Y 之具有凸值(convex valued)的局部可選擇的集合值映射，則 F 具有一個連續選擇函數。

(3) 若 F 爲在 x_0 的局部可選擇，且 G 的圖(graph)爲開集，同時滿足 $F(x_0) \cap G(x_0) \neq \phi$，則 $F \cap G$ 爲在 x_0 的局部可選擇映射。

<u>推論 3</u> 設 X 爲一個亞緊緻拓樸空間，Y 爲一個具有 0 的開凸鄰域濾套(open convex neighborhood filter)V(0)的完備 Hausdorff 拓樸向量空間(complete Hausdorff topological vector space)。若 $F: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$ 爲具有凸值的下半連續集合值映射，$G: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$ 爲具開圖(open graph)的集合值映射，而且，對所有的 $x \in X$，$F(x) \cap G(x) \neq \phi$，則 $co(clF(x) \cap G(x))$ 具有一個連續選擇函數。

<u>證明</u>：固定 $y_0 \in clF(x_0) \cap G(x_0)$。定義 $F_0: X \to 2^Y \setminus \{\phi\}$ 如下：

$$F_0(x)=\begin{cases} \{y_0\} & x = x_0, \\ cl(F(x)) & x \neq x_0. \end{cases}$$

F_0 爲具有閉凸值的下半連續集合值映射。由定理 2 知，F_0 具有一個連續選擇函數 f_0，其爲 cl(F(x))的一個過 y_0 的連續選擇函數。因此，cl(F(x))爲在 x_0 的局部可選擇。既然 G 的圖是開集且 $cl(F(x_0)) \cap G(x_0) \neq \phi$，由註 4(3)知，$cl(F) \cap G$ 在 x_0 爲局部可選擇。在每個 $x \in X$，$co(cl(F) \cap G)$是具凸值的局部可選擇集合值映射。由註 4(2)知，$co(cl(F) \cap G)$具有一個連續選擇函數。

<u>註 5</u>：在推論 3 中，若 F 具閉值(closed valued)，而且 G 具凸值(convex valued)，則結論可改寫爲：

$F \cap G$ 具有一個連續選擇函數[Aubin & Cellina[1]]。

三、參考文獻

1. J. P. Aubin & A. Cellina, Differential Inclusions.1984.

2. L.Narici & E. Beckenstein, Topological Vector Spaces, *Pure and Applied Mathematics*,1985.

3. E. Michael, Continuous Selections I., *Annals of Mathematics*,V.63,No.2,1956,p361-382.

E-mail: yclin@mail.cmc.edu.tw