微積分的面積估算

林炎成
通識教育中心　副教授

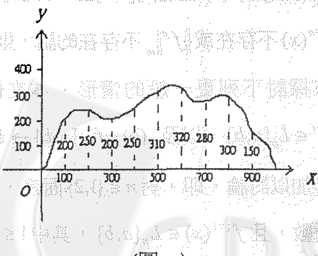
摘要

面積的計算，是微積分的主要議題之一。定積分成為解決封閉區域的面積問題中，最常用且最犀利的工具。而計算定積分之值，除了微積分基本定理以外，也可以採用估計方式如黎曼和、泰勒展開式、梯形法則、辛普森法則等方法。本文將就其中的梯形法則的估計方式加以討論，對條件(1)做修正，使得有更多函數能夠適用此估計法。

關鍵字：$L_p[a,b]$ 空間，梯形法則，辛普森法則，*Hölder* 不等式，*Beta* 函數，*Gamma* 函數。

一、前言

對於封閉區域範圍的面積討論，如人體皮膚燒燙傷面積、油船擱淺油污外漏污染海面的面積、河溝的截面積等等，這些問題可以採用定積分的方式加以解決。微積分基本定理是最常用且最方便的方法之一。然而，此方法需要找出其被積分函數的反導函數，方可算出其值。對於那些無法找出被積分函數之反導函數的定積分，估計其值的方式便成爲必要的。而估計所得的誤差，需要降低到我們容許的範圍內，這樣的估計值，才有足夠可信度。因此，一個定積分之估計值及所得誤差的估計，便是一個重要的課題。筆者於微積分課程，曾問到這類



(圖一)

問題，也是著眼於此。茲附於下列，請讀者參考：

1、試以 $n=6$ 的梯形法則，估計 $y=x^3$ 在區間[1,3]上的曲線長，並求其誤差。

2、油輪擱淺外海，造成污油外漏事件。從圖一(單位公尺)上可看到海岸受污染的情形。試以辛普森法則(n=10)估計油污污染的面積有多大?

二、梯 形 法 則

微積分中最常用的估計的方式，不外乎是梯形法則及辛普森法則兩種。本節中，將就梯形法則這種估計方法所得的誤差加以討論。

定理甲（梯形法則）：若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲二次可微分函數，且滿足

$$|f''(x)|\le K \quad \forall x\in[a,b]\text{ ,} \tag{1}$$

令 $P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_m=b\}$ 爲區間$[a,b]$上之一分割，

則

$$\left|\int_a^b f(x)dx-T_m\right|\le\frac{K(b-a)^3}{12m^2}\text{ ,}$$

其中，$T_m=\dfrac{b-a}{2m}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m))$。

關於定理甲的應用，讀者可參閱微積分相關書籍，如 Adams**[1]**, Grossman**[3]**, Neuhauser**[4]**或 Purcell**[6]**等書籍。到此我們不禁要問道：如果遇到的函數 $f(x)$ 在區間$[a,b]$上，無法滿足（1）式，例如在區間$[a\,,b]$內的某點 $f''(x)$ 不存在或 $\|f''\|_\infty$ 不存在的話，則定理甲將無法運用！所以，現在我們就來探討下列更一般的情形。本文僅就 (a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲絕對連續，且 $f'\in L_p[a,b]$，以及 (b) $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲絕對連續，且 $f''\in L_p[a,b]$，兩種情形加以討論。即，對 $n\in\{1,2\}$ 而言，若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，滿足 $f^{(n-1)}$ 爲絕對連續函數，且 $f^{(n)}(x)\in L_p[a,b]$，其中 $1\le p\le\infty$。這裡的 $L_p[a,b]$ 是指定義在閉區間$[a,\,b]$上的函數且滿足條件

$$\begin{cases} \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty & \text{當 } 0 \le p < \infty \\ \sup_{a \le x \le b} |f(x)| < \infty & \text{當 } p = \infty \end{cases}$$

的所有函數所成的集合，即，當$1 \le p < \infty$時，

$$L_p[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty\}，$$

而L_p-範數定義爲$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$；當$p = \infty$時，

$L_\infty[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \sup_{a \le x \le b} |f(x)| < \infty\}$，而$L_\infty$-範數定義爲$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$。

L_p-函數之於L_p-範數，有如實數之於絕對值一般，具有類似“測距”的功能。若遇到在區間[a ，b]內的某點$f''(x)$不存在，我們可以試著用(a)法。若遇到$\|f''\|_\infty$不存在的話，我們可以試著用(b)法。現在，我們就來敘述本篇的主要結果：

定理一：令$n \in \{1,2\}$，$p,q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$使得$1 \le p,q \le \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$（特別地，當 p=1 時，q=∞。當 p=∞時，q=1）。若$f : [a,b] \to \mathbb{R}$滿足，$f^{(n-1)}$爲絕對連續函數，且$f^{(n)} \in L_p[a,b]$，則下列不等式成立：

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \le C(n,p)(b-a)^{n+\frac{1}{q}} \|f^{(n)}\|_p \text{。} \tag{2}$$

其中，$C(1,1) = \frac{1}{2}, C(1,\infty) = \frac{1}{4}, C(2,1) = \frac{1}{8}, C(2,\infty) = \frac{1}{12},$

當$1 < p < \infty$時，$C(n,p) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1+q)^{1/q}} & n = 1 \\ \dfrac{(B(q+1,q+1))^{1/q}}{2} & n = 2 \end{cases}$。

註：*Gamma* 函數[2,p.277] $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \quad (p > 0)$

$Beta$ 函數[2,p.331] $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(p,q>0)$。

證明：因為 $\int_a^b f(x)dx-\dfrac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ 可以改寫為 $-\int_a^b(x-\dfrac{b+a}{2})f'(x)dx$，

所以，

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|=\left|-\int_a^b(x-\frac{b+a}{2})f'(x)dx\right| 。\qquad(3)$$

又因為 $\int_a^b f(x)dx-\dfrac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ 可以改寫為

$$\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx ，$$

所以，

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx\right| \qquad(4)$$

接著，底下我們分幾個子項，來討論（3）式以及（4）式的結果。

（ㄅ）當 $n=1$，$1<p<\infty$ 時。

（3）式再經由 *Hölder* 不等式，可得

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|=\left|-\int_a^b(x-\frac{b+a}{2})f'(x)dx\right|$$

$$\leq(\int_a^b\left|x-\frac{b+a}{2}\right|^q dx)^{1/q}\|f'\|_p 。\qquad(5)$$

由於，$\int_a^b\left|x-\dfrac{b+a}{2}\right|^q dx=\int_a^{\frac{b+a}{2}}(\dfrac{b+a}{2}-x)^q dx+\int_{\frac{b+a}{2}}^b(x-\dfrac{b+a}{2})^q dx=\dfrac{(b-a)^{q+1}}{(1+q)2^q}$ 。

因此，（5）式可化成下列式子：

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|\leq(\int_a^b\left|x-\frac{b+a}{2}\right|^q dx)^{1/q}\|f'\|_p$$

$$=\frac{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}{2(1+q)^{\frac{1}{q}}}\|f'\|_p \text{ 。}$$

（ㄆ）當$n=1$，$p=1$（$q=\infty$）時。(3)式可化成下列式子：

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|=\left|-\int_a^b (x-\frac{b+a}{2})f'(x)dx\right|$$

$$\le \max_{a\le x\le b}\left|x-\frac{b+a}{2}\right|\|f'\|_1=\frac{b-a}{2}\|f'\|_1 \text{ 。}$$

（ㄇ）當$n=1$，$p=\infty$（$q=1$）時。

(3)式可化成下列式子：

$$\left(\int_a^b\left|x-\frac{b+a}{2}\right|dx\right)\|f'\|_\infty=\frac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty \text{ 。}$$

（ㄈ）當$n=2$，$1<p<\infty$時。

(4)式再經由 *Hölder* 不等式，可得

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\int_a^b|(x-a)(x-b)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \qquad (6)$$

由於積分 $\int_a^b|(x-a)(x-b)|^q dx=(b-a)^{2q+1}B(q+1,q+1)$。(6)式可化成下列形式：

$$\frac{1}{2}\left(\int_a^b|(x-a)(x-b)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p=\frac{(b-a)^{2+\frac{1}{q}}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}}{2}\|f''\|_p$$

（ㄉ）當$n=2$，$p=1$時。

(4)式可化成下列形式：

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\right|\le\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|\|f''\|_1$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\|f''\|_1$$

（ㄊ）當$n=2$，$p=\infty$時。

(4)式可化成下列形式：

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)|dx\|f''\|_\infty$$
$$=\frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

經由（ㄅ）項到（ㄊ）項的討論，我們得到（2）式。證畢。

現在，我們將函數f的定義域$[a,b]$作分割，令$P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_m=b\}$爲$[a,b]$上的一個分割，以$\|P\|=\max\limits_{1\le i\le m}\{\Delta x_i\}$表分割 P 的範數，其中，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$1\le i\le m$。定積分$\int_a^b f(x)dx$由梯形法則所做的形式爲：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (f(x_{i-1})+f(x_i))\Delta x_i+R(P)，$$

$R(P)$爲對應於分割 P 之餘項，它可被用來估計以$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (f(x_{i-1})+f(x_i))\Delta x_i$來當作定積分$\int_a^b f(x)dx$之値所產生的誤差。

定理二：令$n\in\{1,2\}$，$p,q\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，使得$1\le p,q\le\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（特別地，當 $p=1$ 時，$q=\infty$。當 $p=\infty$時，$q=1$）。若$f:[a,b]\to\mathbb{R}$滿足，$f^{(n-1)}$爲絕對連續函數，且$f^{(n)}\in L_p[a,b]$，$P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_m=b\}$爲$[a,b]$上的一個分割，則梯形法則的餘式$R(P)$，滿足下列不等式：

$$|R(P)|\le mC(n,p)\|f^{(n)}\|_p\|P\|^{n+\frac{1}{q}}，\tag{7}$$

其中$C(n,p)$同定理一所示。特別地，當分割P爲正規分割時，(7) 式可表爲如下形式：

$$|R(P)|\le mC(n,p)\|f^{(n)}\|_p\left(\frac{b-a}{m}\right)^{n+\frac{1}{q}}。\tag{8}$$

註：當 $n=2$，$p=\infty$ 時，$q=1$。此時（8）式可改寫爲：$|R(P)| \le \frac{(b-a)^3}{12m^2}\|f''\|_\infty$。這就是在微積分課程中所介紹的梯形法則的誤差上限公式。請參考定理甲。

註：有關於 *Simpson* 法則的相關論述， *Pečarić* 及 *Varošanec* 在最近的一篇文章**[5]**裡，有詳細的介紹誤差上限公式，值得讀者參考。

銘謝：本文作者誠然感謝審查教授仔細的審閱本文與提供的建議。

參考文獻

[1] R. A. Adams, *Calculus*, 3rd edit., 1995, Addison-Wesley Publishers Limited.

[2] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd edit.,1977, 台北圖書有限公司。

[3] S. I. Grossman, *Calculus*, 5th edit.,1992, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[4] C. Neuhaoser, *Calculus for Biology and Medicine*, 2000, Prentice-Hall, Inc.

[5] J. Pečarić and S. Varošanec, *Simpson's Formula for Functions Whose Derivatives Belong to L_p Spaces*, Appl. Math. Lett., 14, 131-135 (2001)

[6] D. Varberg, E. J. Purcell and S. E. Rigdon, *Calculus*, 8th edit., 2000, Prentice-Hall, Inc.