集合值映射之定點定理及其應用

林炎成

通識教育中心　副教授

摘 要

本文介紹在積空間(product spaces)上的定點定理(fixed point theorems)以及證明在非緊緻抽象經濟(non-compact abstract economy) 的一個平衡點存在定理。這些結論推廣了現有文獻中的結果。

關鍵字: 積空間(product spaces)，集合值映射(multivalued maps)，定點定理(fixed point theorems)，單位元劃分(partition of unity)，抽象經濟(abstract economy)，平衡點(equilibrium point)。

*本文作者對本篇文章的完成，要誠摯的感謝姚任之教授及 Q. H. ANSARI 教授　提供有用的註解。

一、前 言

設 A 爲非空集合，我們記 2^A 爲 A 之所有子集合所成的集合。若 A 爲向量空間的子集合，以 co(A)表 A 之凸包(convex hull of A)。集合值映射 $F: X \to 2^Y$ 之逆映射 $F^{-1}: Y \to 2^X$ ，定義爲 $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ 。令 $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$ 。若 $F(X)=Y$ 我們稱 F 爲映成映射(surjective)。

最近的文獻中，積空間上的集合值映射族(a family of multivalued maps)之定點定理已被討論著，並且應用到非線性分析(nonlinear analysis)，凸性分析(convex analysis)，經濟(economics)以及對局論(game theory)等領域上，請參考[1-6]及其他參考文獻。文獻[1-2,4,6]的結果，推廣了著名的 Browder 之定點定理[7]，然而[3,5]之結果，推廣了 Himmelberg's 之定點定理[8]。因 Browder 之定點定理是解決非線性分析，凸性分析，經濟以及對局論等大量問題的主要工具，故許多

作者都推廣此定理，例如文獻[9-12]其他參考文獻。

最近，Djafari-Rouhani 等[13]推廣了文獻[10]的結果，並加以應用到廣義變分不等式(generalized variational inequalities)上。循此推廣的過程，在本篇文章中，我們建立了一些在積空間上的集合值映射族之定點定理，這些結論推廣了許多最近文獻[1]及[13]的已知結果。做為我們的定點定理的應用，在具有無限多個商品(commodities)及無限多個行為者(agents)的非緊緻抽象經濟之中，我們證明了一個平衡點存在定理。

二、定點定理

設 I 為一個指標集，對每個 $i \in I$，設 E_i 是一個 Hausdorff 拓樸向量空間 (topological vector space)。設 $\{K_i \subseteq E_i : i \in I\}$ 為非空凸集合族。令 $K = \prod_{i \in I} K_i$ 及 $E = \prod_{i \in I} E_i$。我們首先給予下列定點定理來推出我們的主要結果。

<u>定理 2.1</u>：對每個 $i \in I$，$S_i, T_i : K \to 2^{K_i}$ 為兩個集合值映射。假設下列條件成立。

(i) 對每個 $i \in I$ 及對每個 $x \in K$，$\mathrm{co}((\mathrm{int}_K S_i^{-1})^{-1}(x)) \subseteq T_i(x)$，其中 $(\mathrm{int}_K S_i^{-1})^{-1}$ 表 $\mathrm{int}_K S_i^{-1}$ 之逆映射，而 $(\mathrm{int}_K S_i^{-1})(x_i) = \mathrm{int}_K S_i^{-1}(x_i)\ \forall x_i \in K_i$。

(ii) 若 K 不是緊緻集，則對每個 $i \in I$, 存在一個非空緊緻凸集 $C_i \subseteq K_i$ 以及點集 $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il_i}\} \subset K_i$ 使得

$$\bigcap_{x_i \in C_i} (K \setminus \mathrm{int}_K S_i^{-1}(x_i)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l_i} \mathrm{int}_K S_i^{-1}(a_{ij})。$$

則存在 $\bar{x} \in K$，使得 $\bar{x} \in T(\bar{x}) = \prod_{i \in I} T_i(\bar{x})$。亦即，對於每個 $i \in I$，$\bar{x}_i \in T_i(\bar{x})$，其中 $\bar{x}_i$ 是 $\bar{x}$ 在 K_i 上的投影(projection)。

<u>證明</u>：對每個 $i \in I$，由條件(ii)知，$(\mathrm{int}_K S_i^{-1})^{-1}(x) \neq \phi\quad \forall x \in K$，而且得知

$K\setminus\bigcup_{x_i\in C_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(x_i)\subseteq\bigcup_{j=1}^{l_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(a_{ij})$。則

$$K=\bigcup_{x_i\in D_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(x_i)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

其中 $D_i=C_i\cup\{a_{i1},a_{i2},..,a_{il_i}\}$。

令 $F_i=\operatorname{co}(D_i)$，則 F_i 是 K_i 的非空緊緻凸集。令 $F=\prod_{i\in I}F_i$，則 F 亦爲 K 的非空緊緻凸集。由(1)式，我們可得 $F\subseteq\bigcup_{x_i\in D_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(x_i)$。由於 F 是緊緻集，存在點集 $\{b_{i1},b_{i2},..,b_{i,m_i}\}\subset D_i$，使得

$$F\subseteq\bigcup_{j=1}^{m_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(b_{ij})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

令 $X_i=\operatorname{co}\{b_{i1},b_{i2},..,b_{im_i}\}$ 以及 $X=\prod_{i\in I}X_i$，則 $X_i\subseteq F_i$ 且 $X\subseteq F$。因此，

$X\subseteq(\bigcup_{k=1}^{m_i}\operatorname{int}_K S_i^{-1}(b_{ik}))\cap X=\bigcup_{k=1}^{m_i}(\operatorname{int}_K S_i^{-1}(b_{ik})\cap X)$，故得 $X=\bigcup_{k=1}^{m_i}\operatorname{int}_X S_i^{-1}(b_{ik})$。

因爲 X 是緊緻集，對應於此覆蓋，存在一個單位元劃分(partition of unity) $\{g_{i1},g_{i2},...,g_{im_i}\}$，使得

(a) 對每個 $k=1,2,..,m_i$， $g_{ik}:X\to[0,1]$ 爲連續函數，

(b) 對每個 $k=1,2,..,m_i$， $g_{ik}(x)=0\ \forall x\notin\operatorname{int}_X S_i^{-1}(b_{ik})$，

(c) 對每個 $x\in X$， $\sum_{k=1}^{m_i}g_{ik}(x)=1$。

對每個 $i\in I$，我們定義 $f_i:X\to X_i$ 爲 $f_i(x)=\sum_{k=1}^{m_i}g_{ik}(x)b_{ik}$， $\forall x\in X$。很明顯地，對每個 $i\in I$， $f_i:X\to X_i$ 爲連續函數。對每個 $x\in X$，以及對每個 k 具有 $g_{ik}(x)\neq 0$ 的性質而言，我們可得知: $x\in\operatorname{int}_K S_i^{-1}(b_{ik})$，故得

$b_{ik} \in (\text{int}_K S_i^{-1})^{-1}(x) \ \forall i \in I$。

由條件(ｉ)及 f_i 的定義可得知:

$$對每個 i \in I，f_i(x) \in \text{co}((\text{int}_K S_i^{-1})^{-1}(x)) \subseteq T_i(x) \ \forall x \in X。$$

定義一個函數 $h: X \to X$ 爲 $h(x) = (f_i(x))_{i \in I}$。因對每個 $x \in X$，$f_i(x) \in X_i$，故 h 爲良好定義(well-defined)且爲連續函數。由 Tychonoff 的定點定理可知，h 具有一個定點 $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in X$。由此可得知: $\bar{x}_i = f_i(\bar{x}) \ \forall i \in I$。既然對每個 $i \in I$，$f_i(x) \in T_i(x) \ \forall x \in X$，我們可得 $\bar{x}_i \in T_i(\bar{x})$。證明完畢。

我們注意到:定理 2.1 之條件(ｉｉ)較下列條件弱

(ｉｉ)' $K = \bigcup_{y_i \in K_i} \text{int}_K S_i^{-1}(y_i) \ \forall i \in I$. 若 K 不是緊緻集，則假設對每個 $i \in I$，存在一個 K_i 之非空緊緻凸集 C_i 及 K 之非空緊緻集 D 使得，對每個 $x \in K \setminus D$，存在 $\tilde{y}_i \in C_i$ 使得 $x \in \text{int}_K S_i^{-1}(\tilde{y}_i)$。

事實上，假設條件(ｉｉ)'成立，我們可得 $K \setminus D \subseteq \bigcup_{y_i \in C_i} \text{int}_K S_i^{-1}(y_i)$。則

$$\bigcap_{y_i \in C_i} \{K \setminus \text{int}_K S_i^{-1}(y_i)\} \subseteq D。 \qquad \text{.........................(3).}$$

因爲對每個 $i \in I$，$K = \bigcup_{y_i \in K_i} \text{int}_K S_i^{-1}(y_i)$，我們可推得

$D \subseteq \bigcup_{y_i \in K_i} \text{int}_K S_i^{-1}(y_i)$。因爲 D 是緊緻集，存在點集 $\{a_{i1}, a_{i2} .., a_{il_i}\} \subset K_i$，使得

$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{l_i} \text{int}_K S_i^{-1}(a_{ij})$。將此結果與(3)式組合，我們可得定理 2.1 之條件(ｉｉ)。就是因爲這個原因，定理 2.1 包含了下列結果:

<u>定理 2.2</u>：對每個 $i \in I$，$S_i, T_i : K \to 2^{K_i}$ 為兩個集合值映射. 假設下列條件成立。

（i）對每個 $i \in I$ 及對每個 $x \in K$，$\mathrm{co}((\mathrm{int}_K S_i^{-1})^{-1}(x)) \subseteq T_i(x)$ 且 $S_i(x) \neq \phi$。

（ii）對每個 $i \in I$，$K = \bigcup_{x_i \in K_i} \mathrm{int}_K S_i^{-1}(x_i)$。

（iii）若 K 不是緊緻集，則對每個 $i \in I$，存在一個非空緊緻凸集 $C_i \subseteq K_i$ 以及 K 之非空緊緻集 D，使得: 對每個 $x \in K \setminus D$，存在 $\widetilde{y}_i \in C_i$，滿足 $x \in \mathrm{int}_K S_i^{-1}(\widetilde{y}_i)$。

則存在 $\bar{x} \in K$，使得 $\bar{x} \in T(\bar{x}) = \prod_{i \in I} T_i(\bar{x})$。亦即，對於每個 $i \in I$，$\bar{x}_i \in T_i(\bar{x})$，其中 $\bar{x}_i$ 是 $\bar{x}$ 在 K_i 上的投影(projection)。

定理 2.2 推廣了文獻[1]之定理 1 之結果。

當定理 2.1 之指標 I 為單點集(singleton)時，我們可得下列結果:

<u>推論 2.3</u>: 假設 K 為 Hausdorff 拓樸向量空間 E 之非空凸集，$S, T : K \to 2^K$ 為兩個集合值映射. 假設下列條件成立。

(i)對每個 $x \in K$，$\mathrm{co}((\mathrm{int}_K S^{-1})^{-1}(x)) \subseteq T(x)$。

(ii) 若 K 不是緊緻集，則存在一個非空緊緻凸集 $C \subseteq K$ 以及點集 $\{a_1, a_2, ..., a_l\} \subset K$，使得

$$\bigcap_{x \in C} (K \setminus \mathrm{int}_K S^{-1}(x)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} \mathrm{int}_K S^{-1}(a_j)。$$

則存在 $\bar{x} \in K$，使得 $\bar{x} \in T(\bar{x})$。

如同定理 2.2 的理由，推論 2.3 包含了文獻[1]之推論 1。同時我們也可推得下列最近的結果:

<u>推論 2.4</u>([2],定理 2.1):假設 X 為 Hausdorff 拓樸向量空間 E 之非空凸集, $f: X \to 2^X$ 為一個集合值映射。假設下列條件成立。

(i) 對每個 $x \in X$, $f(x)$ 為 X 之非空凸集。

(ii) 對每個 $y \in X$, $f^{-1}(y) = \{x \in X : y \in f(x)\}$ 包含了一個開集合 O_y,此集合 O_y 可為空集合。

(iii) $\bigcup_{y \in X} O_y = X$ 。

(iv) 存在一個 X 非空緊緻凸集 X_1,以及點集合 $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n\} \subset X$,使得

$$D = \bigcup_{x \in X_1} O_x^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{\hat{x}_i}$$

(其中 O_x^c 表示 O_x 在 X 中的補集合)。

則存在 $x_0 \in X$,使得 $x_0 \in f(x_0)$ 。

<u>證明</u>:若令 $K = X$ 以及 $S = T = f$,那麼條件(i)可推得推論 2.3 之條件(i)成立.

再由條件(ii)及條件(iii),我們可得 $X = \bigcup_{y \in X} O_y \subseteq \bigcup_{y \in X} \operatorname{int}_X f^{-1}(y)$ 。因此,由條件(iv)可得

$$\bigcap_{x \in X_1} \{X \setminus \operatorname{int}_X f^{-1}(x)\} \subseteq \bigcap_{x \in X_1} \{X \setminus \operatorname{int}_X O_x^c\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{\hat{x}_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int}_X f^{-1}(\hat{x}_i) \text{ 。}$$

則推論 2.3 之條件(ii)成立.因此由推論 2.3 得知:

存在 $x_0 \in X$,使得 $x_0 \in f(x_0)$ 。 證明完畢。

三、一個抽象經濟的平衡點存在定理

在本節之中,我們在具有無限多個商品(commodities)及無限多個行為者(agents)的非緊緻抽象經濟(non-compact abstract economy)之中,推出一個抽象經濟的平衡點存在定理。令 I 是個行爲者集(可能是不可數).一個抽象經濟

$\Gamma=(K_i,A_i,B_i,P_i)_{i\in I}$，其中 $A_i,B_i:K=\prod_{i\in I}K_i\to 2^{K_i}$ 爲局限映射(constraint correspondences)，$P_i:K\to 2^{K_i}$ 爲偏好映射(preference correspondence)。一個抽象經濟 Γ 的平衡點(equilibrium point)[2]，指的是一點 $\bar{x}\in K$，使得對每個 $i\in I$，

$$\bar{x}\in B_i(\bar{x})$$

且 $$A_i(\bar{x})\cap P_i(\bar{x})=\phi \text{。}$$

對每個 $i\in I$，當 $A_i=B_i$ 時，此抽象經濟與平衡點的定義和傳統定義，如[3]，[4]，相同。

<u>**定理 3.1**</u> 令 I 為一個指標集，對每個 $i\in I$，設 E_i 是一個 Hausdorff 拓樸向量空間(topological vector space)。設 $\{K_i\subseteq E_i:i\in I\}$ 為非空凸集合族。令 $K=\prod_{i\in I}K_i$ 及 $E=\prod_{i\in I}E_i$。而 $\Gamma=(K_i,A_i,B_i,P_i)_{i\in I}$ 爲一個抽象經濟.假設下列條件成立。

(i) 對每個 $i\in I$ 及對每個 $x\in K$，$\mathrm{co}(A_i(x))\subseteq B_i(x)$。

(ii) 對每個 $i\in I$ 及對每個 $x\in K$，$x_i\notin \mathrm{co}(P_i(x))$。

(iii) 若 K 不是緊緻集，則對每個 $i\in I$，存在一個非空緊緻凸集 $C_i\subseteq K_i$ 以及點集 $\{a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{il_i}\}\subset K_i$ 使得

$$\bigcap_{x_i\in C_i}K\setminus \mathrm{int}_K\{[(coP_i)^{-1}(x_i)\cup W_i]\cap A_i^{-1}(x_i)\}$$

$$\subseteq\bigcup_{j=1}^{l_i}\mathrm{int}_K\{[(coP_i)^{-1}(a_{ij})\cup W_i]\cap A_i^{-1}(a_{ij})\}.$$

其中 $W_i=\{x\in K:A_i(x)\cap P_i(x)=\phi\}$。

則存在 $\bar{x}\in K$，使得對每個 $i\in I$，$\bar{x}_i\in B_i(\bar{x})$ 且 $A_i(\bar{x})\cap P_i(\bar{x})=\phi$。

<u>**證明**</u>：對每個 $i\in I$，令 $V_i=\{x\in K:A_i(x)\cap P_i(x)\neq\phi\}$ 且對每個 $x\in K$，令 $I(x)=\{i\in I:A_i(x)\cap P_i(x)\neq\phi\}$。

對每個$i \in I$，定義$S_i, T_i : K = \prod_{i \in I} K_i \to 2^{K_i}$爲

$$S_i(x) = \begin{cases} co(P_i(x_i)) \bigcap A_i(x) & i \in I(x), \\ A_i(x) & i \notin I(x). \end{cases}$$

以及

$$T_i(x) = \begin{cases} co(P_i(x_i)) \bigcap B_i(x) & i \in I(x), \\ B_i(x) & i \notin I(x). \end{cases}$$

則由條件(ｉ)知，對每個$i \in I(x)$，

$$\begin{aligned} & \mathrm{co}((\mathrm{int}_K S^{-1})^{-1}(x)) \\ &= co(S_i(x)) \\ &= co\{co(P_i(x_i)) \cap A_i(x)\} \\ &\subseteq co(P_i(x_i)) \cap co(A_i(x)) \\ &\subseteq co(P_i(x_i)) \cap co(B_i(x)) \\ &= T_i(x) \text{。} \end{aligned}$$

若$i \notin I(x)$，由條件(ｉ)知，$co((\mathrm{int}_K S^{-1})^{-1}(x)) \subseteq T_i(x)$。並且，

$$\begin{aligned} S_i^{-1}(x_i) &= \left(\{(coP_i)^{-1}(x_i) \cap A_i^{-1}(x_i)\} \cap V_i\right) \bigcup \left(A_i^{-1}(x_i) \cap W_i\right) \\ &= ((coP_i)^{-1}(x_i) \cup W_i) \cap A_i^{-1}(x_i) \text{。} \end{aligned}$$

很明顯地，條件(ｉｉｉ)可推得定理 2.1 之條件(ｉｉ)成立，故由定理 2.1 知:存在$\bar{x} \in K$，使得對每個$i \in I$，$\bar{x}_i \in T_i(\bar{x})$。又由條件(ｉｉ)以及$T_i(x)$的定義，得知對每個$i \in I$，$\bar{x}_i \in B_i(\bar{x})$且$A_i(\bar{x}) \cap P_i(\bar{x}) = \phi$。 證明完畢。

註：定理 3.1 推廣了文獻[1]之定理 2。

參 考 文 獻

[1] Q.H. Ansari and J.C. Yao,
A Fixed Point Theorem and Its Applications to a System of Variational

Inequalities, Bull. Austral. Math. Sco. 59, 433-442 (1999).

[2] X. P. Ding, W. K. Kim and K. K. Tan,
A Selection Theorem and Its Applications, Bull. Austral. Math. Soc., 46, 205-212 (1992).

[3] N.-J. Huang,
Some New Equilibrium Theorems for Abstract Economies, Appl. Math. Lett., 11 (2), 41-45 (1998).

[4] K.Q. Lan and J. Webb,
New Fixed Point Theorems for a Family of Mappings and Applications to Problems on Sets With Convex Sections, Proc. Amer. Math. Soc., 126, 1127-1132 (1998).

[5] X. Wu,
A New Fixed Point Theorem and Its Applications, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 1779-1783 (1997).

[6] X. Wu and S. Shen,
A Further Generalization of Yannelis-Prabhakar's Continuous Selection Theorem and Its Applications, J. Math. Anal. Appl. 196, 61-74 (1996).

[7] F. E. Browder,
The Fixed Point Theory of Multivalued Mappings in Topological Vector Spaces, Math. Ann., 177, 283-301 (1968).

[8] C.J. Himmelberg,
Fixed Points of Compact Multifunctions, J. Math. Anal. Appl. 38, 205-207 (1972).

[9] E. Tarafdar,

On Nonlinear Variational Inequalities, Proc. Amer. Math. Soc., 67, 95-98 (1977).

[10] E. Tarafdar,
A Fixed Point Theorem Equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem, J. Math. Anal. Appl., 128, 475-479 (1987).

[11] S. Park,
Some Coincidence Theorems on Acyclic Multifunctions and Applications to KKM Theory, In Fixed Point Theory and Applications}, (Edited by K.K. Tan), pp. 248-277, World Scientific, River Edge, NJ, (1992).

[12] N. C. Yannelis and N. D. Prabhakar,
Existence of Maximal Elements and Equilibria in Linear Topological Spaces, J. Math. Econom., 12, 233-245 (1983).

[13] B. Djafari-Rouhani, E. Tarafdar and P. J. Watson,
Fixed Point Theorems, Coincidence Theorems and Variational Inequalities, Submitted in the Proceedings of the 6th International Symposium on Generalized Convexity/Monotonicity, Samos, Greece, (1999).

[14] A. Borglin and H. Keiding,
Existence of Equilibrium Actions and of Equilibrium: A Note On the `New' Existence Theorem, J. Math. Econom., 3, 313-316 (1976).

[15] 林炎成,
在拓樸向量空間中的MICHAEL選擇定理, 中國醫藥學院通識教育年刊, 第一期, 183-189, (1999).

E-mail address: yclin@mail.cmc.edu.tw