通識教育年刊第五期 第 171 至 191 頁 2003 年 12 月 中國醫藥大學通識教育中心

微積分的教學與動態教材設計

林炎成

中國醫藥大學通識教育中心副教授

論文摘要

在本文中，我們將為微積分的教學，設計出動態畫面的教材，來詮釋較為抽象的數學概念，諸如極限、連續函數的合成、導數的圖解、方向導數、偏導數等有助於提升抽象解題能力之具體示例，請參考第參節。我們將嘗試以全新的表象，來詮釋微積分的定義及定理。

本文所展示的結果，將作為在教學上的輔助教材，希望能引導初學者建立正確的概念。我們在第貳節，針對本校在微積分教學上所遇到的困難及因應對策做探討。

最後，我們也在第肆節對於學習者與教學者提出建言，期望能達到拋磚引玉的效果來，並企盼先進前輩們能提供後學更多有效的經驗與指正。

關鍵詞：動態畫面，極限，連續函數的合成，導數，方向導數，偏導數

壹、前言

近年來，各校對於微積分教學的輔助教材的開發不遺餘力，國外有類似的做法，主要是將課程內容電子化[18]；國內也有各院校，例如中興、逢甲、靜宜等有教授微積分課程的學校作跨校的合作，請參考[24]。

在本文中，我們著手對於初學者因抽象而較為難以理解的單元，設計了一些輔助教材，希望對於初學此學科的同學，能達到御繁為簡、化抽象為具體的功能，以及對於教學者在教學上，抽象概念的傳達，能有所助益。然而，教育是百年事業，基於「教育是不能容許嘗試錯誤」的審慎原則之下，本次之研究，僅僅是在**理論**上作探討，尚未真正在實際教學上實施。將來在有關學習者接受度之評估成熟之後，才會實行於正式課堂的教學上。

貳、目前本校微積分課程之上課困難與處理措施

微積分是一門人類數學知識與智慧累積的學問。在各個領域，諸如物理、生物、資訊、通信、工程、經濟、企管等，利用為共同的科學語言，並且至今仍能廣為熱烈討論。此事實足以粉碎"微積分無用論"之迷思--此應為"知識無用論"之延伸。值得慶幸的是這些論點並沒有影響到絕大部分的同學對於本課程學習的求知慾。

儘管如此，在上課時仍舊面臨極大的困難與挑戰，其因應的對策說明如下：

一、關於課程內容與授課時間：本校授課時數每週二小時，各系大都分上、下兩學期教授本課程。因此，課程進度、內容的安排與時間的掌控更形重要。儘管時間很吃緊，課程內容有魚與熊掌之擇，大致上仍分成微分學與積分學兩階段來介紹。

二、教材的設計：除依靠 OHP(參考[10], p175-191)或 Powerpoint 的輔助外，為了開創滿足本課程需求的新輔助教材，這也讓本文的研究有了討論的空間。有些連續變動的畫面，一來無法在黑板上呈現全貌，二來無法以 Powerpoint 表現這

種動態畫面。而且，現在市面上或在各大學相關的輔助教材的開發，仍相當缺乏。因此，符合自己教學的教材設計更形重要了。本文所有之研究成果，均是創新的結果。請參考第肆節的具體實例。

三、教法的改善：除了使用傳統的黑板之外，搭配硬體，諸如幻燈機、投影機及單槍投影機，輔以適當的數學軟體、多媒體軟體，來靈活表達課程內容，藉以增強抽象概念更具體的呈現。

參、提升抽象理解能力之具體示例

初學者面對現階段抽象概念訓練，最希望的是「眼見為憑」以及「What you see is what you get」的輔助。底下我們就從參考文獻[1-9,11-22]裡，舉一些時常被初學者提出問題的單元或定義，以動態畫面的為輔助作為示範：

一、極限 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定義：

極限的觀念，貫穿了整個微積分。而此觀念就困擾了絕大部分的初學者，尤其是極限 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定義。其實，這個問題也曾困擾著大數學家 Paul Halmos，他自述說[26, p84-85]：

「…當時毫無概念，我不知道什麼是 epsilon(ε)，我覺得吹毛求疵無聊，我真的不懂。那天下午在數學大樓 213 教室黑板前和 Warren Ambrose 談話，突然的我懂 epsilon(ε)了，也了解極限是什麼了，教材的點點滴滴都清楚了。…」

以上的事實，讓我們這些過來人感到親切與一些安慰，原來數學家們也是這樣過來的！在這裡，我們運用動態畫面的輔助，來加深初學者對於極限 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的印象。首先畫面呈現出函數 f 的圖形，決定出點 x=a 以及 L 的位置，如圖 1 所示：

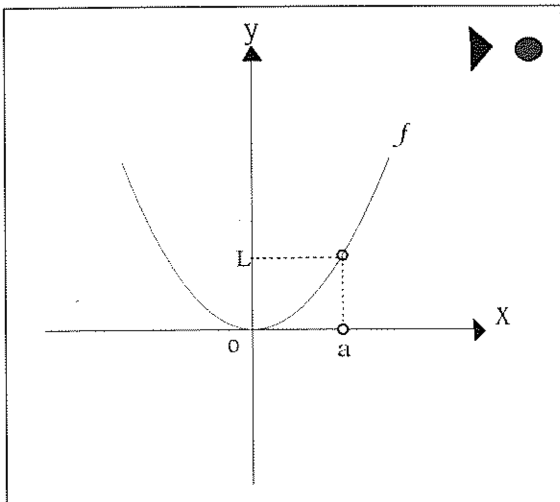


圖 1

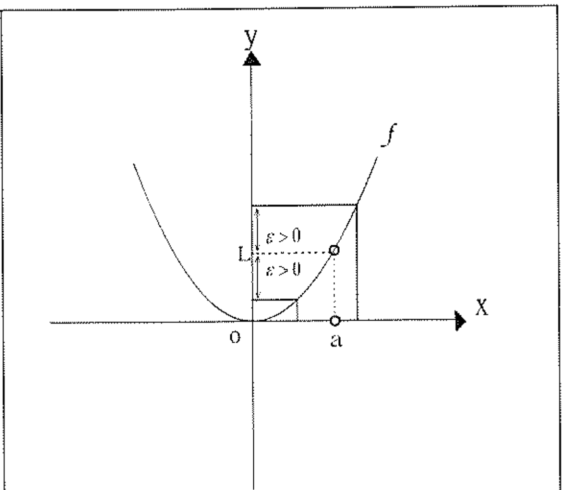


圖 2

對於任意的正數ε，以 L 為中心，ε為半徑，找到了在 L 附近的一個範圍來，如圖 2 所示。在 a 點附近找到一個範圍 $(a-\delta, a+\delta)$，其中 $\delta>0$，如圖 3 所示：

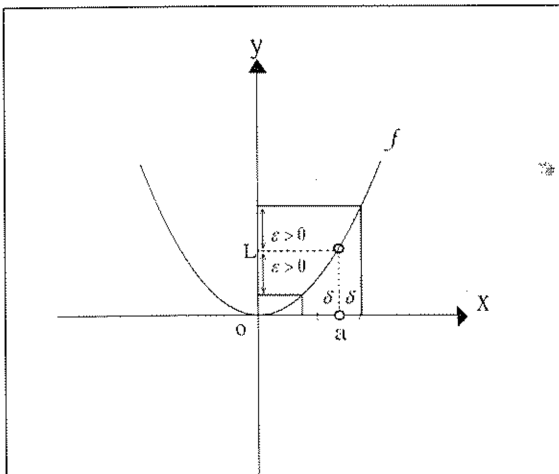


圖 3

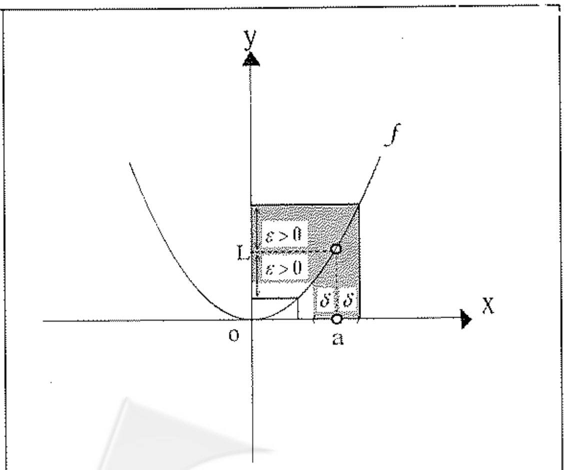


圖 4

使得凡是落在這個 $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ 範圍的 x，其函數值 f(x) 必落在 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 這個範圍，如圖 4 所示：

綜合以上之分析得知：極限 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 之 $\varepsilon-\delta$ 定義，可以做如下的敘述(請參考圖 5)：

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

讀者更應該留意 δ 值並不唯一，以及 ε 值改變時，δ 值會跟著變化的事實(參考圖 5 紅線部份)。

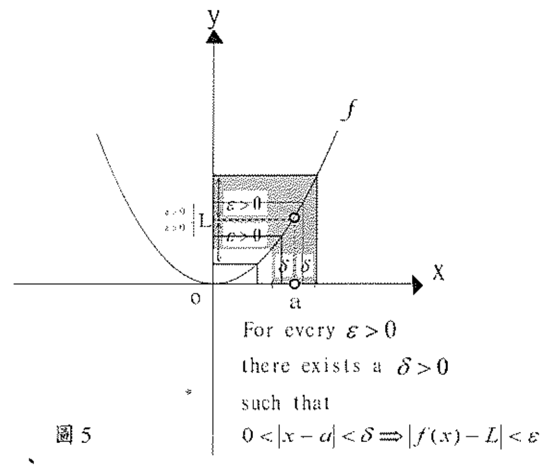


圖 5

二、立體圖形的展現：

在黑板上所描繪出立體圖形，考驗著學生的想像力，尤其是抽象的透視能力。這裡以求楔型物的體積為例：

首先要呈現出楔形物的形狀來，如圖 6、圖 7 所示：

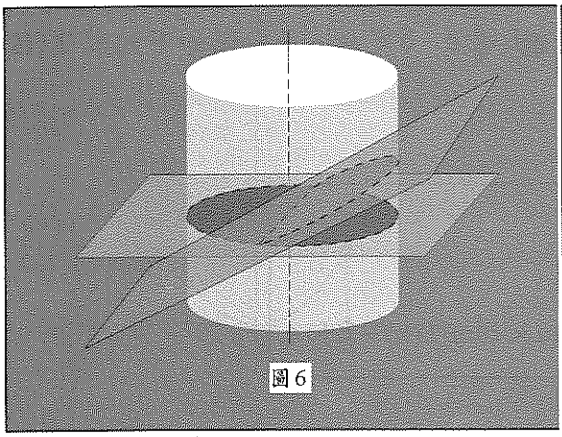


圖6

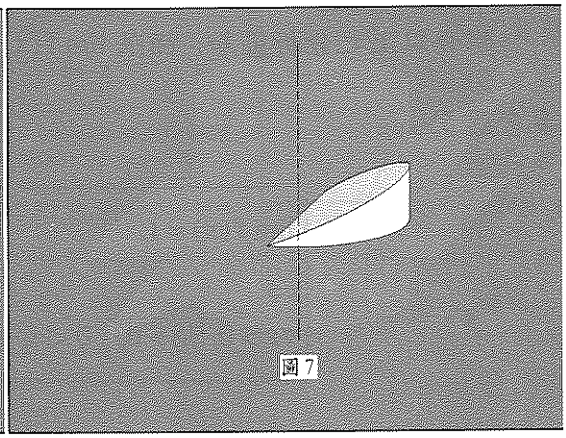


圖7

畫面中明顯呈現了楔形物是從一個直立圓柱上，由兩個交線為圓柱直徑的平面所截，其中之一平面對圓柱橫切，如圖 6 所示。如果僅從文字的敘述要想像出其立體圖，或者畫出其立體圖來，這對於初學者而言，是有一定的難度（在上完課後，牙醫系的凌同學也來找老師繼續討論這個立體圖的呈現問題）。

現在，欲求此楔形物的體積。如果已知兩平面的夾角是 α 角，而圓柱的半徑為 r。對圖 7 的楔形物定座標，如圖 8 所示：

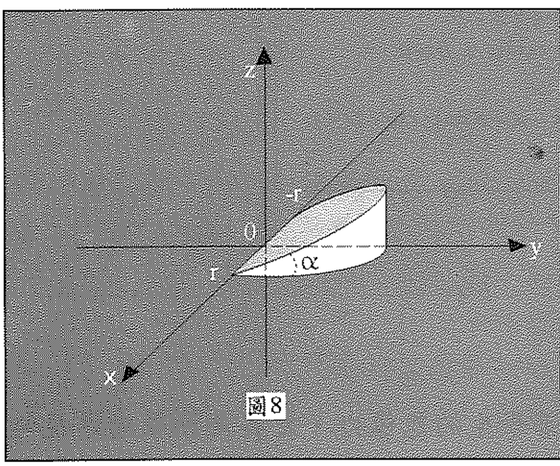


圖8

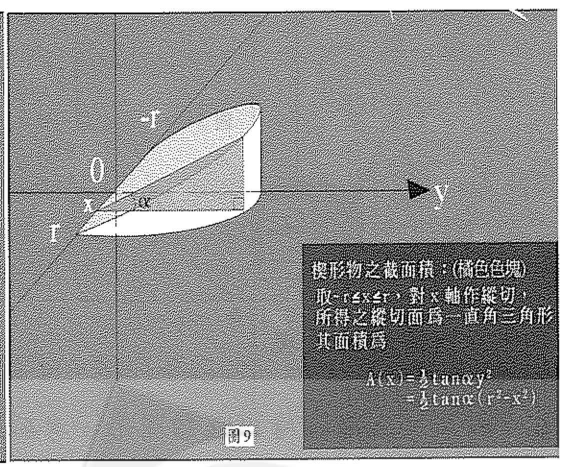


圖9

依照切片法(The Slicing Method)，對 x 軸做縱切，其介於 $-r \le x \le r$ 的 x 處的截面為一個直角三角形，如圖 9 所示：其截面圖形(橘色)及截面積(綠底白字)。

再代入切片法公式裏，得體積如圖 10 所示。

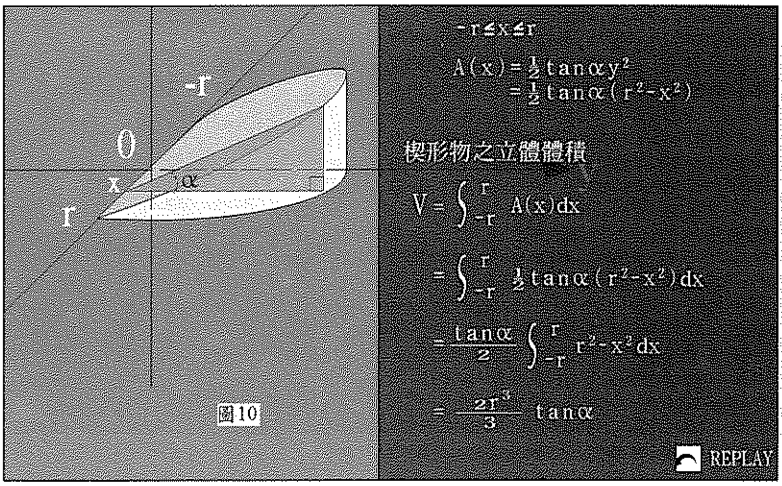


圖10

圖 10 之右下角，設有 Replay 的功能，供讀者重複觀賞。

三、連續函數的合成：

作者記得在上連續函數的單元時，運動醫學系的林同學，下課時間跑來問我這個問題，他想知道：「任意兩個可作**合成**(composition)的連續函數，合成之後如何做到連續」？希望老師能給予畫圖方式來說明。經過圖解說明後，我看到了滿意的笑容以及領悟的肢體語言。茲以動畫方式來呈現解說過程：

首先呈現原問題如圖 11 所示。

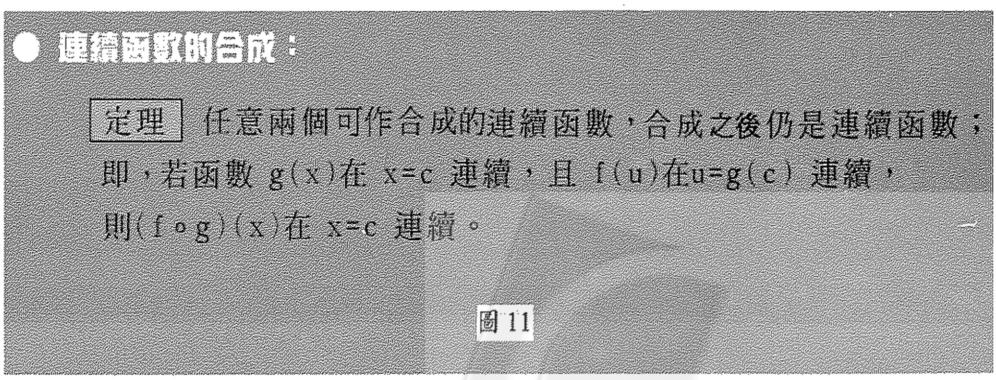


圖11

再呈現證明的部分，如圖 12 所示。

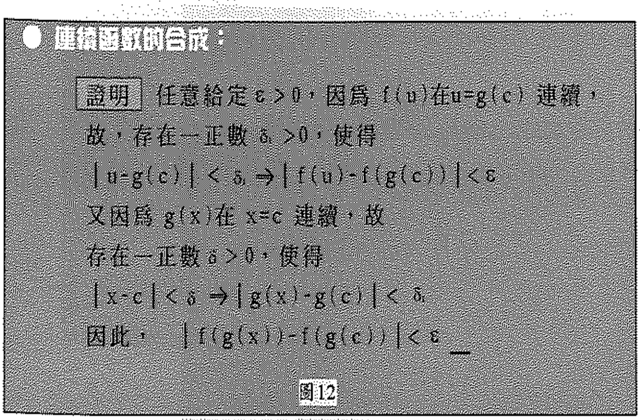


圖12

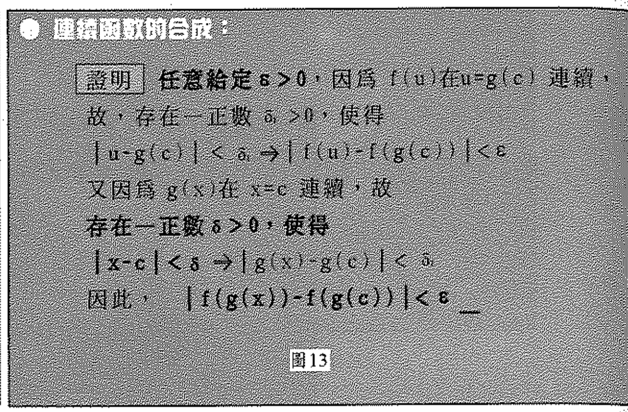


圖13

然後再以圖層加強關鍵位置，如圖 13 所示：

以上的證明，如果對初學者造成某種程度的困擾，我們還可以加上底下的圖解(如圖 14 所示)：

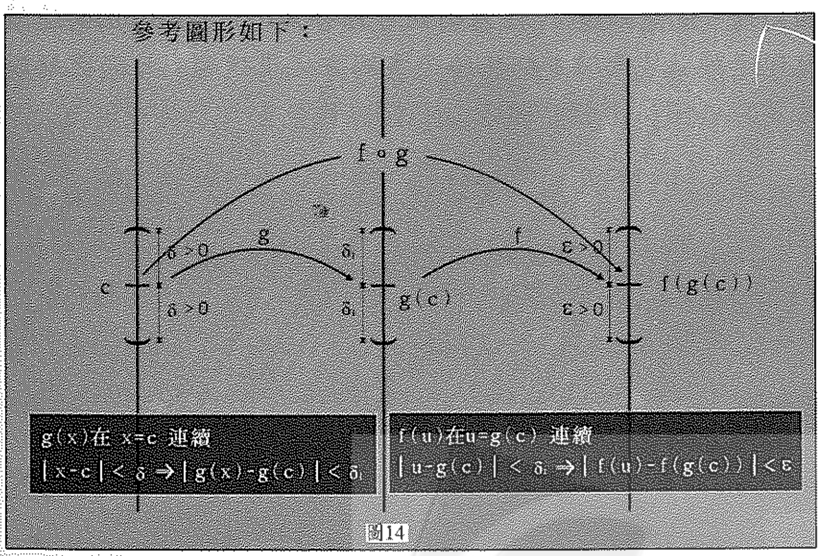


圖14

有了圖 14 的說明就很容易了解:『任意兩個可作合成的連續函數，合成之後仍為連續函數』的意義了，如圖 15 所示。圖 15 左上角是設定的功能鍵，提供更

靈活解說。

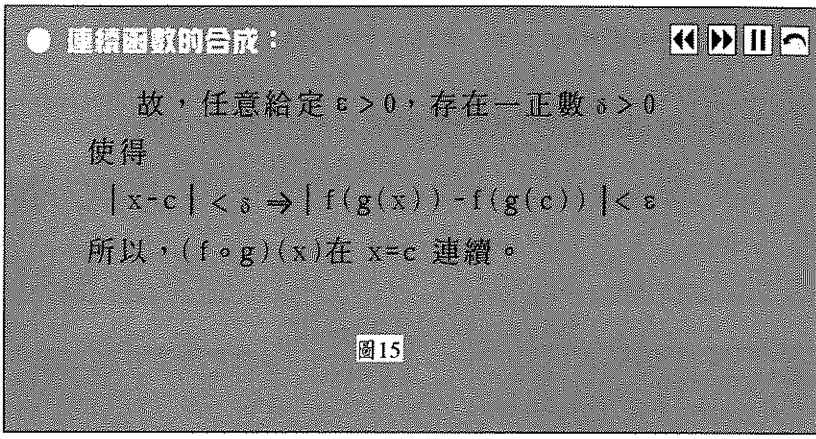


圖15

四、導數的圖解：

導數(derivatives)的觀念，是進入微分學的重要基礎。現有的教科書或參考書，大都是以 G. W. Leibniz (1646 - 1716，微積分的創始者之一)所提出的觀點為藍本，來介紹這個重要觀念，我們也樂於運用此方式來解說。然而，在這裡我們是以動態畫面的方式來呈現，更加深了初學者的第一印象，也更有助於初學者對這個觀念的理解。

首先呈現的是函數的圖形(如圖 16 所示)，畫面右半為圖形之解說部分。

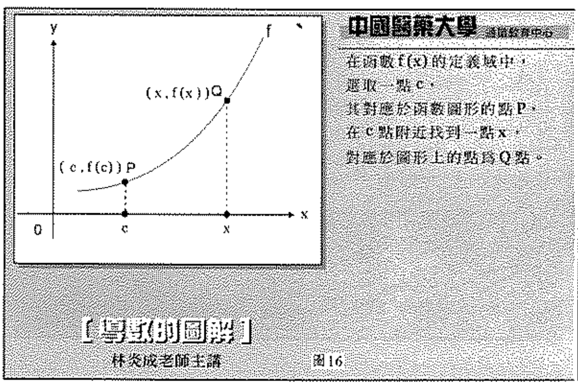


圖16

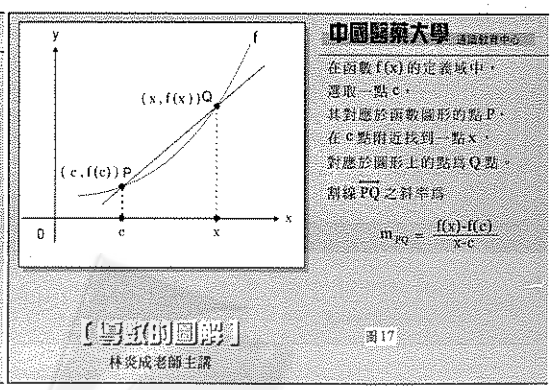


圖17

藉由動畫，引導出通過 PQ 的割線來，並且顯示出其斜率來(如圖 17 所示)。

接著，運用動畫的特有性質(也就是 motion 的功能)，引導割線如何逼近切線的過程，藉此觀察割線的傾斜程度(也就是其斜率)是如何變化到切線來的。如圖 18、圖 19 及圖 20 所示。

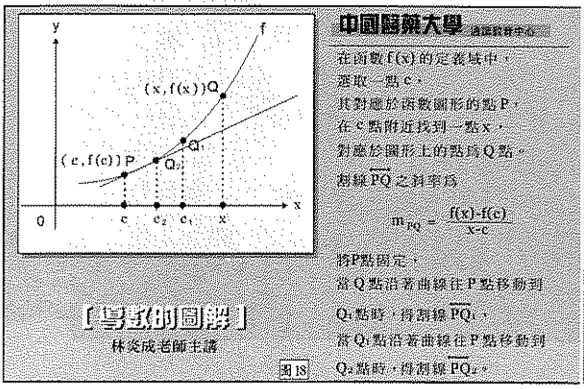


圖18

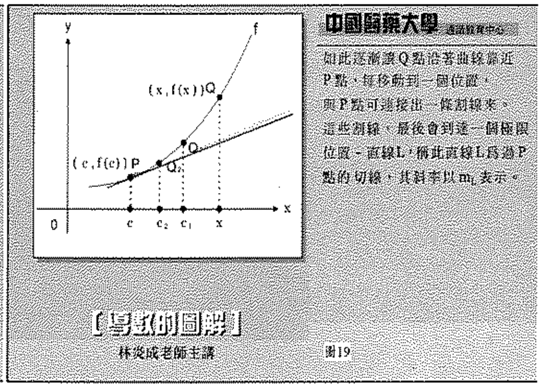


圖19

圖 20 的右下方，有一個 Reload 的功能，讓讀者可再觀賞一遍整個割線逼近切線的過程。

如上的畫面引導出切線斜率的極限形式來：$m_L = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$，如圖 21 所示。

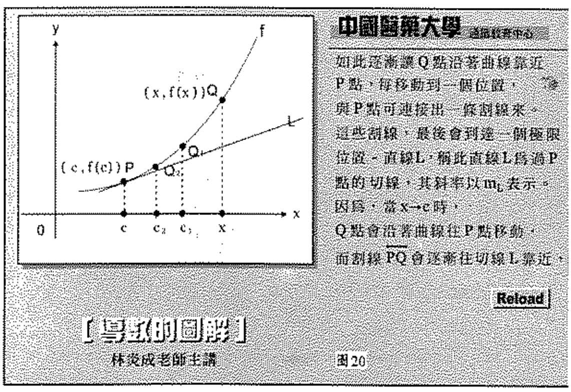


圖20

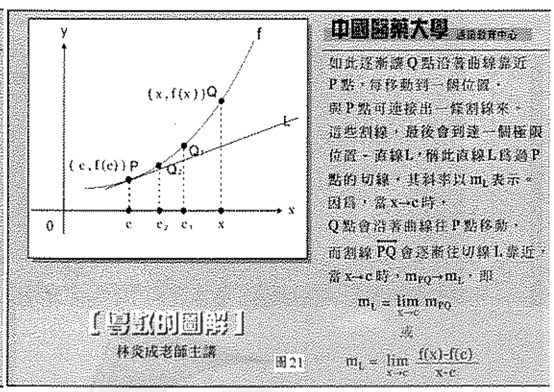
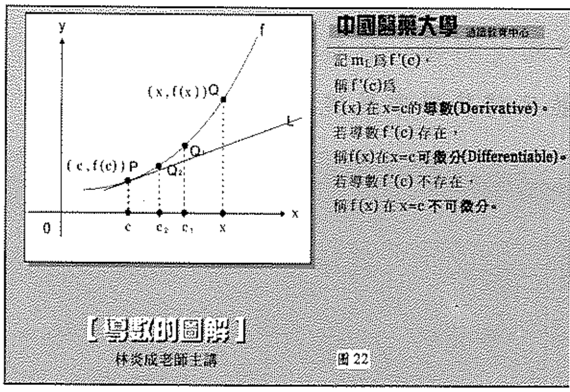
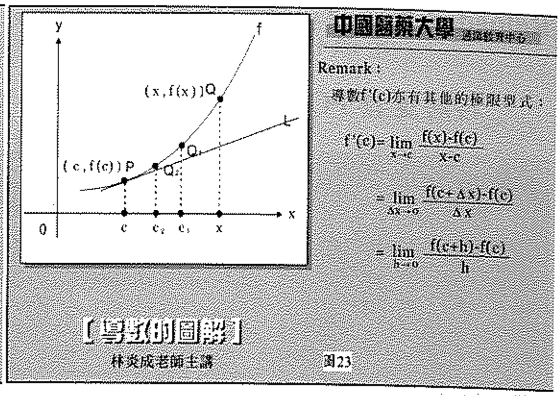


圖21

進而完成了**導數**觀念的介紹。更進一步地介紹**微分**的定義，引領學子進入微分學的園地。如圖 22 所示。



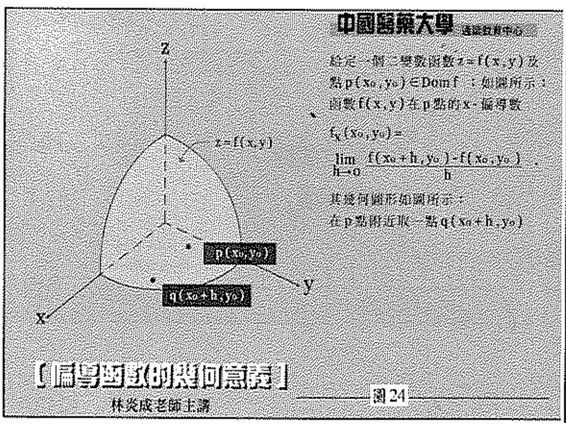


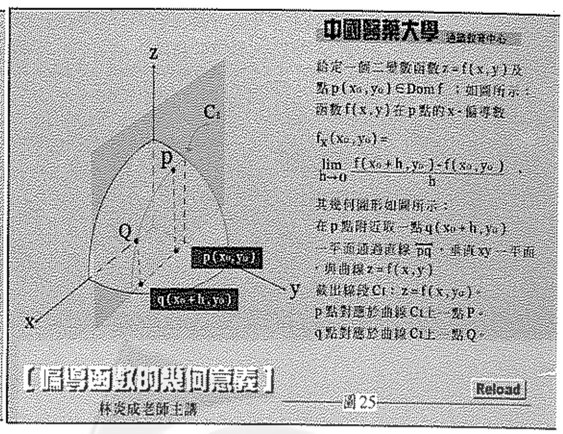
最後還要提醒初學者，導數的極限形式有很多種，別為形式不同而混淆了。如圖 23 右邊所示。

五、偏導函數的幾何意義：

我們知道單變數函數的導數的圖解之後，對於二變數函數的偏導數的意義，也可以採取幾何方式解說。

首先對 x-偏導數的定義加上圖形做說明，如圖 24 所示：





當 h 趨近於 0 時，點 $q(x_0+h,y_0)$ 將往點 $p(x_0,y_0)$ 移動，為方便觀察在曲面 $z=f(x,y)$ 上對應點移動的情形，我們造出曲線 C_1 來，如圖 25 所示：右下角的

Reload 功能，提供重複觀賞前一片段。

再將連接 PQ 兩點的直線畫出來，並且將其斜率展現出來，如圖 26 所示。

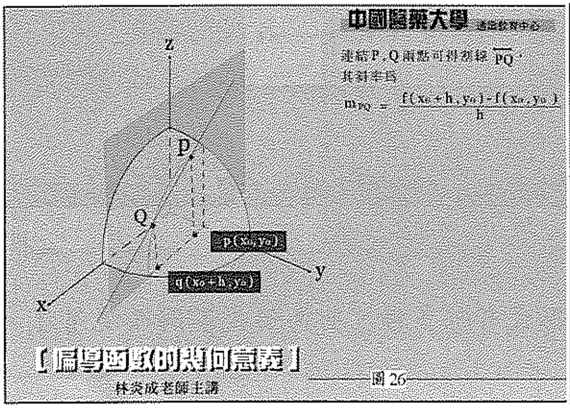


圖 26

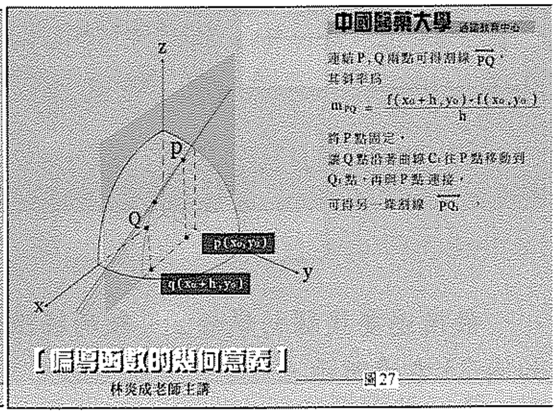


圖 27

圖 27 及圖 28 分別描述：當 h 趨近於 0 時，Q 點往 P 點移動的情形，並且也展現出對應的割線連續移動的情形：

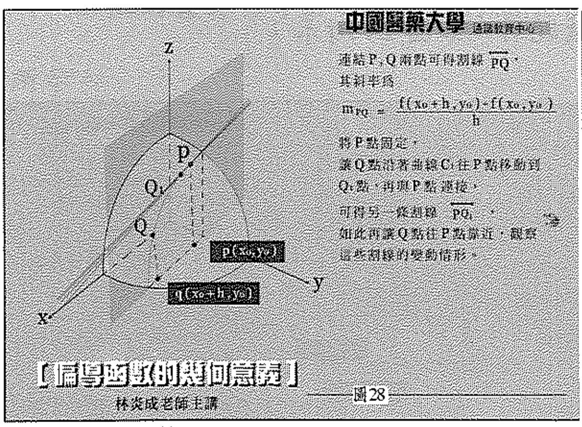


圖 28

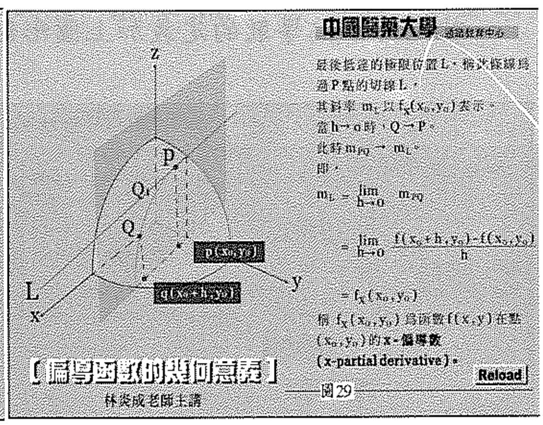


圖 29

最後，割線所抵達的極限位置-切線 L，其斜率即為 x-偏導數 $f_x(x_0, y_0)$，如圖 29 所示：

同樣的方式，也同樣可以解釋 y-偏導數 $f_y(x_0, y_0)$，如圖 30 所示：

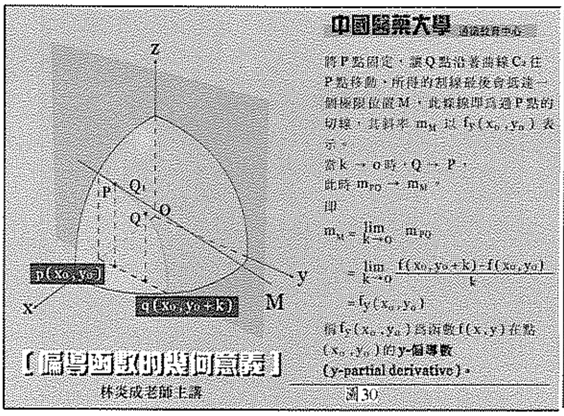


圖30

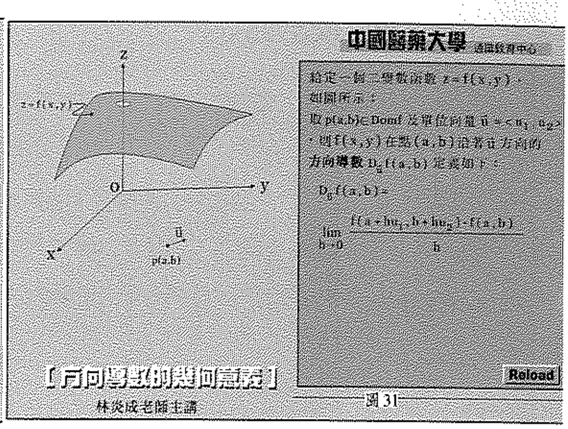


圖31

六、方向導數的幾何意義：

接下來，我們在來看看比偏導數更一般化的方向導數。圖 31 中，我們先給出方向導數的意義，然後再從圖中解釋其意義。

我們先造出曲線 C，用來解釋點 $q(a+hu_1, b+hu_2)$往點 p(a,b)移動時，其對應的函數值 $f(a+hu_1, b+hu_2)$與 f(a,b)移動的情形，如圖 32 所示：

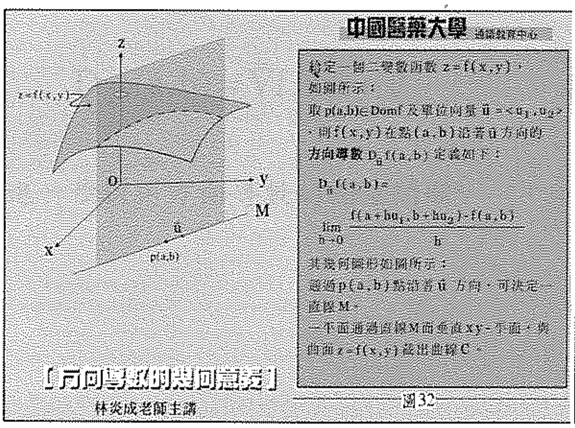


圖32

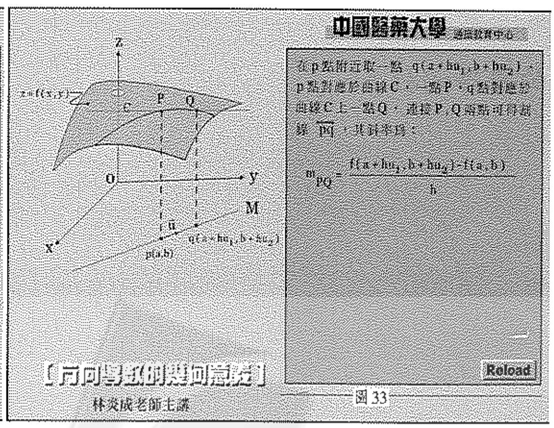


圖33

圖 33 中呈現出點 Q 與點 P 所連接的割線及其斜率。

藉著圖 33 讓 Q 點往 P 點移動，以便觀察整個割線移動到切線的變化，從而更容易了解 $m_{PQ} \to m_L$ 的意義。此 m_L 即為函數 f 在點(a,b)上沿著 $\vec{u}$ 方向的方向導數(directional derivative)。

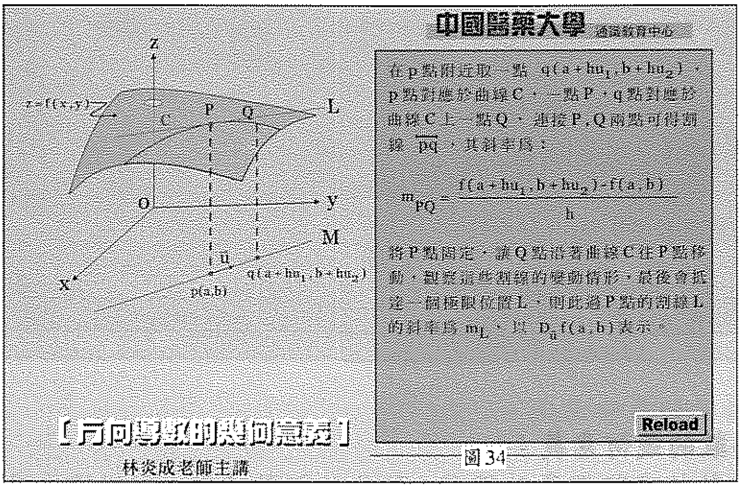


圖 34

在圖 34 之後，我們也針對方向導數與偏導數之間的關係作進一步的說明：圖 35、圖 36 提供了公式

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(a,b) = \vec{\nabla}f(a,b)\cdot\vec{u}}$$

的推導過程。

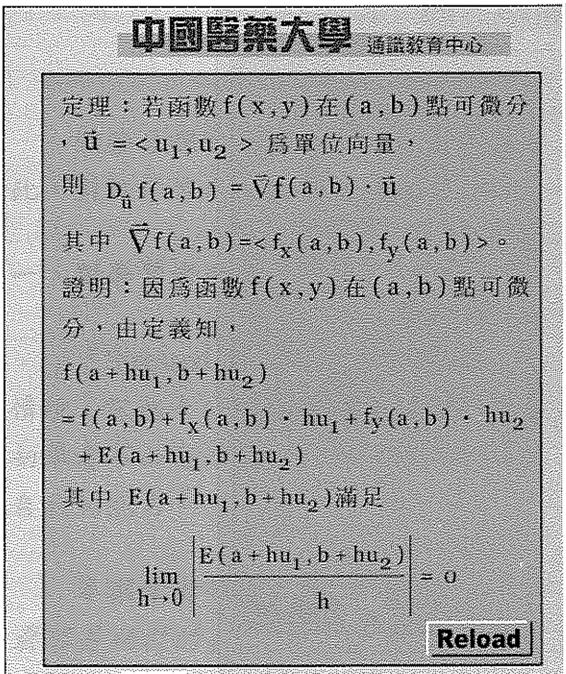


圖35

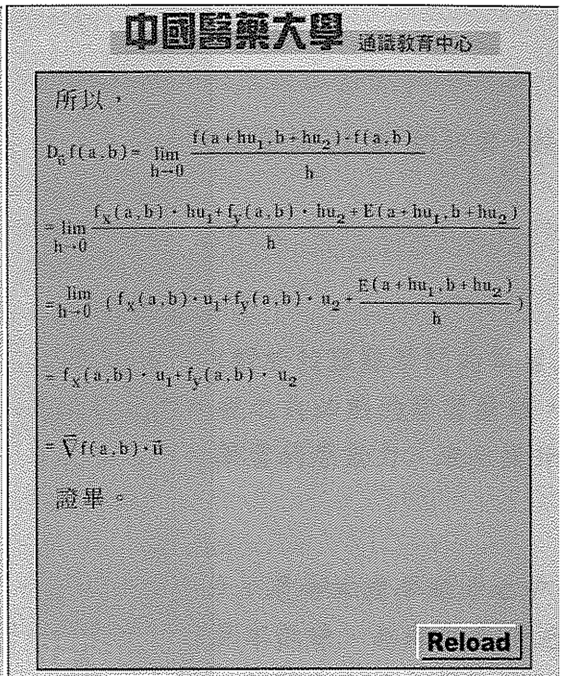


圖36

圖 37 則將方向導數與 x-偏導數、y-偏導數之間的關係，明白地表達出來。並藉由圖 35、圖 36 所提供的公式

$$D_{\vec{u}}f(a,b)=\vec{\nabla}f(a,b)\cdot\vec{u}\text{，}$$

進一步探討方向導數的極值問題。

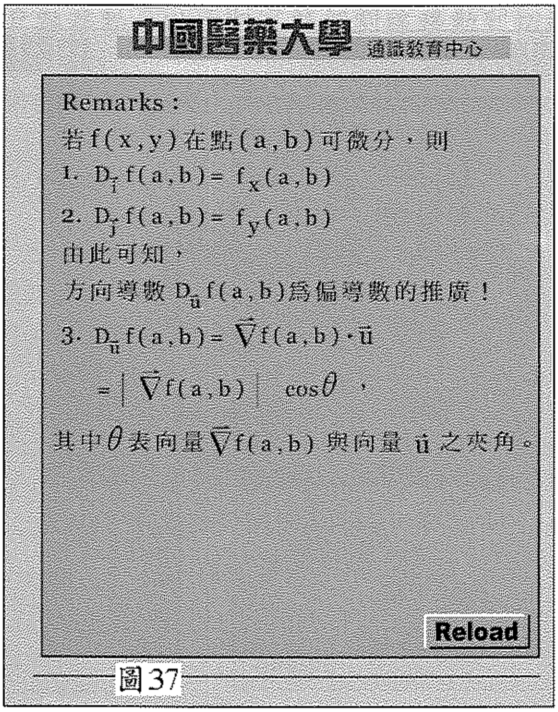


圖37

圖38右半邊呈現出特殊角的結果，左半邊則明白顯現，在選定方向$\vec{u}$之後，方向導數的大小與正負之值來；而且，它可由滑鼠點選來呈現！

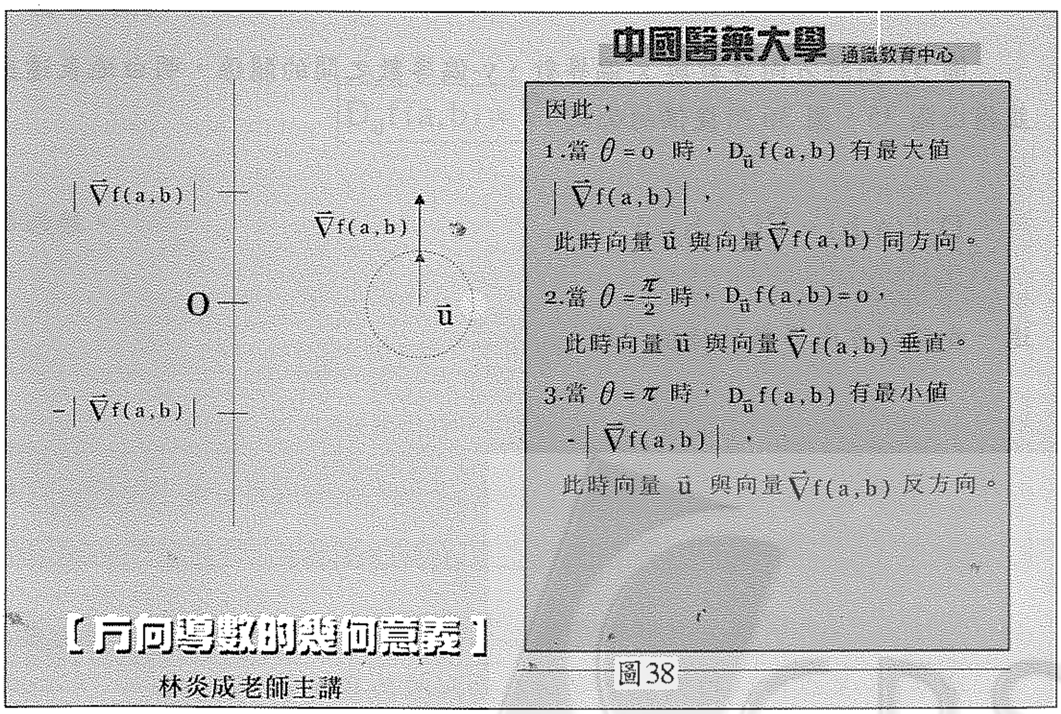


圖38

肆、對微積分學習與教學的建議

微積分課程不論是對初學的學生或是授課的老師均算是個”吃重”的科目。藉此，對於學習者及教學者提出建言如下：

一、對學習者而言：

『Stressed backward is desserts』，這句話反映著賢哲對於較艱難學問的學習情境，它也十分適合反應本課程的學習。適當的壓力應視之為必然的學習歷程，初學者不必也不能視之為畏途，相反的，應視之為推升學習的原動力，進而提升自我的能力。

專家學者普遍認同：``一時”不足的『*基礎計算能力，是所有數學能力之中最容易補救的*』[25, p30]。學習者切莫把自己單純的計算不熟練，解釋為『*缺乏整體數學能力*』，倘若如此，則可能形成拒絕學習，從而影響應有的表現水準，而即使是簡單的規則也不易掌握。如果這觀念根植潛意識裡，難以改變的惡性循環就會形成了。

學習者的學習，除了有賴上完課的課後溫習外，發現的問題更應多循著現有所提供的管道與老師、同學們討論問題、解決問題。此外，延續本文研究的第二階段[23]，將更進一步地提供新的討論問題的環境，以便提供學習者即時求知的補給站，以及營造解決問題的討論管道。敬請大家拭目以待。

二、對教學者而言：

多了解學習者的學習狀況。面對學習能力較快的學生，如何提供更進一步的延伸內容，以滿足其求知慾。而面對因某些緣故而學習情況落後的學生，如何適度提供督促、警惕及鼓勵其調整學習進度？以及，面對學習意願低落的學生，如何協助其彌補所學之不足？

欲解決這些在授課的過程中所遭遇的問題，維持並提升教學品質，授課的班級與人數一定有其合理的上限。這就算是在有助教帶演習課的班級，也是必須加

以評估的事。

任何能突破傳統式的教學，均屬難能可貴。然而，任何創新與突破的教學，及所提供的新式教材，均需做審慎的環境評估，經歷一段時間做實驗式的教學，並檢討其中的利弊得失、可行方案及配套措施，再施行於正式的課堂之中。對於動態畫面的呈現，也不宜過度倚重，以免反而影響初學者應有的抽象思考訓練。

伍、結語

希望藉由本文之研究，探究出在教學上所面臨困難的解決之道。教育是百年之業，數學教育亦是如此。

想藉由某種新教材，就能馬上達到全面的立竿見影之效，恐怕會希望落空，或者會與自己的評估有極大的落差。因為，「羅馬不是一天造成的」。

作者僅憑藉著教授本課程的實際教學經驗，提出以上粗淺的心得，期望能達到拋磚引玉的效果來，企盼先進前輩們能提供後學更多有效的經驗與指正。在此僅引述下列一段賴教授漢卿先生之銘言與讀者互勉：

「山高仰止，景行行之，雖不能至，心嚮往之。」

陸、銘謝

本文作者萬分感謝中國醫藥學院專題研究計畫編號CMC91-GCC-04的經費補助，使本計畫案之第一階段能順利完成。作者也要感謝審閱本文的教授所提供有用的建言。

柒、參考文獻

1. R. A. Adams, Calculus, Addison-Wesley Publishers Limited, 4th ed.

2. R. A. Barnett, M. R. Ziegler, K. E. Byleen, Calculus for Business Economics Life Sciences & Social Sciences, 9th ed.

3. G. C. Berresford, Calculus With Applications To The Management, Social, Behavioral, & Biomedical Sciences.

4. R. E. Larson, R. P. Hostetler and B. H. Edward, Calculus with Analytic Geometry, 7th ed.

5. P. Gillett, Calculus with Analytic Geometry, D.C. Heath and Company.

6. L. J. Goldstein, D.C. Lay and D.I. Schneider, Calculus and its Applications, Prentice-Hall, Inc.

7. Grossman, Calculus, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 5th ed.

8. L.D. Hoffmann and G.L. Bradley, Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences, McGraw-Hill, Inc.

9. R.E. Johnson, F.L. Kiokemeister and E.S. Wolk, Calculus with Analytic Geometry, Allyn and Bacon, INC., Boston, Massachusetts, 6th ed.

10. Jerrold E. Kemp & Don C. Smellie, Planning, Producing, and using instructional M.E.D.I.A, 6th ed., 正中書局, 1994.

11. Johnson, Calculus with analytic geometry, Books/Cole Publishing Company, 7th ed.

12. M. L. Lial, R. N. Greenwell, N. P. Ritchey, Calculus with Applications (Brief Version), 7th ed.

13. Mizrahi and M. Sullivan, Calculus with Analytic Geometry, Wadsworth Publishing Company.

14. C. Neuhauser, Calculus for biology and medicine, Prentice-Hall, Inc., 2001.

15. S. L. Salas, Calculus with Analytic Geometry, John Wiley and Sons., Inc.

16. S. L. Salas, E. Hille and G. J. Etgen, Calculus (one and several variables), 9th ed.

17. G. F. Simmons, Calculus With Analytic Geometry, 2nd ed.

18. J. Stewart, Calculus concepts and contexts, Books/Cole, 2nd ed., 2001.

19. S. T. Tan, Applied Calculus, Books/Cole Publishing Company.

20. G. B. Thomas, R. L. Finney, M. D. Weir and F. R. Giordano, Calculus 10th ed.

21. D. Varberg, E. J. Purcell and S. E. Rigdon, Calculus Prentice-Hall, Inc., 8th edit.

22. S. Waner, S. R. Costenoble, Calculus Applied to the Real World. Brooks/Cole Publishing Company.

23. 林炎成，微積分教學與教材之研究(II)，中國醫藥大學專題研究計畫編號 CMU92-GCC-03，2003 年。

24. 國立中興大學提昇大學基礎教育計畫書, 2001 年。

25. 樂在數學-國民中小學數學教學參考手冊，教育部編著，2003 年 3 月。

26. 數學傳播季刊，中央研究院數學研究所發行，第 27 卷第二期(106)，2003 年 6 月。

捌、附錄

本文中所提到的動態畫面的作品，歡迎蒞臨下列位址觀賞：

http://mail.cmu.edu.tw/~yclin/presentations/index.htm 或

http://calculus.cmu.edu.tw/Math/presentations/index.htm

THE INSTRUCTIONS AND DYNAMIC MATERIALS FOR CALCULUS

Yen-Cherng Lin

Associate Professor, Center of General Education, China Medical University

Abstract

In this paper, we construct some dynamic frames in order to interpret some abstract concepts from the Calculus Course such as 「limits」、「the compositions of the continuous functions」、「derivatives」、「directional derivatives」、「partial derivatives」 and so on. These concrete presentations of the dynamic frames will improvement in learning environment for the freshmen and the beginners and helpful to increasing the interest and the learning achievement in the Course, we refer to SectionⅢ.

We introduce the definitions and theorems by whole new impressions. These results will applications to the teaching context display and lead the beginners to establish validly conceptions. We also discuss the difficulty in the teaching Calculus Course and their strategies in SectionⅡ.

Finally, we also propose some constructive suggestions for the beginners and the supervisors in SectionⅣ. We'll expect to obtain some useful educational suggestions about the Calculus Course from the advanced scholars.

Keywords：Dynamic frames, limits, the compositions of the continuous functions, derivatives, directional derivatives, partial derivatives.

Requests for reprints should be sent to Yen-Cherng Lin, General Education Center, China Medical University, 91 Hsueh-Shih Road, Taichuang 404, Taiwan. E-mail:yclin@mail.cmu.edu.tw